

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	درآمد
۱	۱. پیش برده
۶	۲. درباره کتاب
۹	۳. درباره زبان
۱۱	۴. سپاس گذاری
۱۳	فصل صفرم: تعریف‌های مقدماتی
۱۳	۱. درخت
۱۵	۲. چند مجموعه
۱۷	۳. زبان مرتبه اول
۲۶	فصل نخست: حساب‌های رشته استاندارد برای منطق‌های استاندارد
۲۷	۱. سیستم‌های حساب رشته گنتزن
۲۷	رشته
۳۰	حساب‌های $LJ$ و $LK$
۴۰	برخی اصلاحات جزئی در سیستم‌های گنتزن
۴۴	۲. سیستم‌های حساب رشته برای منطق‌های استاندارد مرتبه اول
۴۴	سیستم‌های زمینه مشترک و زمینه مستقل
۴۹	مسئله برگشت پذیری
۵۸	حساب رشته چندتالی برای منطق شهودگرایانه
۶۶	حساب رشته یک طرفه
۷۳	نشاندن قاعده‌های ساختاری در سیستم
۷۸	۳. قضیه‌های بنیادی نظریه برهان برای سیستم‌های $G3$
۸۱	مسئله سورها
۸۶	برگشت پذیری
۹۶	جواز تضعیف
۹۷	جواز انقباض
۱۰۱	حذف پذیری برش
۱۱۹	روش گنتزن برای اثبات قضیه اصلی
۱۲۱	۴. نتایج حذف برش
۱۲۲	زیرفرمول و چند نتیجه نزدیک

صفحه	عنوان
۱۲۳	قضیه هربراند
۱۲۶	درون یابی
۱۳۱	تصمیم پذیری
۱۳۳	۵. حساب های رشته برای منطق های استاندارد مرتبه دوم
۱۳۳	تعریف های مقدماتی
۱۳۵	سیستم های حساب رشته مرتبه دوم
۱۳۹	۶. استنتاج طبیعی و حساب رشته
۱۳۹	استنتاج طبیعی برای منطق های استاندارد مرتبه اول
۱۴۲	استنتاج طبیعی در فرم حساب رشته
۱۴۴	هم ارزی حساب رشته و استنتاج طبیعی
۱۴۸	حساب رشته در فرم استنتاج طبیعی
۱۵۲	قضیه نرمال سازی و سازگاری
۱۵۵	فصل دوم: میان پرده فلسفی
۱۵۵	۱. انتاج گرایی و سمنتیک نظریه برهانی
۱۵۶	نظریه معنای انتاج گرایانه
۱۵۸	معنای عملگرهای منطقی
۱۶۴	یک مانع سنتی: <i>tonk</i>
۱۶۷	کفایت قاعده های عملگری برای معنا
۱۷۰	۲. سمنتیک نظریه برهانی و سیستم های استنتاجی
۱۷۰	کدام سیستم استنتاجی؟
۱۷۶	عملگر $\Rightarrow$ به مثابه اظهار پذیری
۱۷۸	کدام سیستم حساب رشته؟
۱۸۳	سیستم حساب رشته مناسب
۱۹۱	یک رده بندی جزئی
۱۹۸	فصل سوم: حساب های رشته استاندارد برای منطق های ناستاندارد
۲۰۰	۱. بدون تضعیف
۲۰۱	ربط و فراسازگاری
۲۱۴	نایکنوایی
۲۲۱	ابتنا
۲۲۴	۲. بدون انقباض
۲۲۸	۳. بدون تضعیف و انقباض
۲۳۴	۴. بدون تضعیف، انقباض و جابه جایی
۲۳۴	دوباره داده
۲۳۷	دستور زبان

صفحه	عنوان
۲۴۰	۵. بدون برش
۲۴۰	دوباره ربط و فراسازگاری
۲۴۸	دوباره پارادوکس های سمتیکی
۲۵۱	۶. افزودن ارزش
۲۵۱	منطق های متناهی ارزشی
۲۵۳	ارزش سوم
۲۵۹	ارزش چهارم
۲۶۱	ارزش فازی
۲۷۷	۷. وجه
۲۷۷	منطق های نرمال وجهی
۲۷۸	حساب های رشته برای منطق های نرمال وجهی
۲۸۸	<b>فصل چهارم: حساب های رشته ناستاندارد برای منطق های ناستاندارد</b>
۲۹۰	۱. حساب چندرشته
۲۹۰	منطق وجهی S5
۲۹۴	منطق ابتنا
۲۹۶	۲. حساب رشته چندبعدی
۲۹۶	رده منطق های متناهی ارزشی
۳۰۷	منطق های وجهی
۳۱۲	۳. حساب رشته ساختاری
۳۱۳	لمبک شرکت ناپذیر
۳۱۵	منطق ربط $R^+$
۳۱۹	۴. حساب نمایش
۳۲۳	منطق ربط R
۳۲۶	منطق های وجهی نرمال
۳۲۹	برش در حساب نمایش
۳۳۳	۵. حساب فرارشته
۳۳۹	منطق ربط RM
۳۴۷	منطق لوکاشه ویچ سه ارزشی
۳۴۹	منطق فازی گودل - دامت
۳۵۰	منطق وجهی S5
۳۵۲	۶. پرده آخر؟
۳۶۱	فهرست مراجع
۳۶۷	واژه نامه
۳۷۴	نمایه موضوعی

تقدیم به

استاد بزرگوارم لطف‌الله نبوی  
که فراتر از منطق، انسانیت را از او به یادگار دارم.

## درآمد

### ۱. پیش‌برده

منطق علمی است در حال ساخته شدن، نظیر اینکه ریاضیات علمی است در حال ساخت. بنای منطق، تاریخی به اندازه تاریخ دارد اگرچه قرن بیستم بخش مهمی از این تاریخ است. شکل‌گیری منطق‌های کلاسیک و شهود گرایانه در ابتدای قرن بیستم رخداد تأثیرگذاری بوده است برای شکل‌گیری منطق‌های متفاوت بر اثر موضع‌گیری‌های فلسفی متفاوت. در قرن بیستم و بیست‌ویکم هر چه پیش می‌رویم این تنوع در منطق‌ها با شتابی (و نه صرفاً سرعتی) روزافزونی بیشتر می‌شود.

در میان این همه تنوع دو رویکرد کلان فلسفی به منطق دیده می‌شود: رویکرد نظریه‌برهانی و رویکرد نظریه‌مدلی. رویکرد نظریه‌برهانی منطق را علم استنتاج‌ها می‌بیند و بر مفاهیم بنیادینی نظیر قاعده استنتاج و سازگاری استوار می‌شود. در مقابل، رویکرد نظریه‌مدلی منطق را علم صدق‌های منطقی تلقی می‌کند و حول مفاهیم محوری‌ای نظیر صدق و ارجاع می‌چرخد.

نظریه برهان دو اصطلاح رایج دارد که خوب است از هم تفکیک شوند. گاهی منظور از «نظریه برهان» سیستم استنتاجی یک منطق خاص است. گاهی نیز منظور از «نظریه برهان» مطالعه سیستم‌های استنتاجی است. به طور مشابه، «نظریه مدلی» نیز گاهی به معنای یک سیستم صوری دلالت‌شناسی برای یک منطق است که به طور نظام‌مند ارجاع و شرایط صدق را در بر دارد و گاهی نیز به معنای مطالعه چنین سیستم‌هایی است.

رویکرد نظریه‌برهانی به منطق مدعی است که سیستم استنتاجی (نظریه برهان به معنای نخست)، طبیعت منطق را آشکار می‌کند و مطالعه سیستم استنتاجی (نظریه برهان به معنای دوم) مطالعه طبیعت منطق (یعنی همان علم منطق) است. در مقابل، رویکرد نظریه‌مدلی به منطق مدعی است که سیستم صوری دلالت‌شناسی (نظریه مدلی به معنای نخست) طبیعت منطق را نمایان می‌کند و مطالعه چنین سیستمی (نظریه مدلی به معنای دوم) همان علم منطق است. روشن

است که هر یک از این رویکردها ترکیبی از فعالیت‌های فلسفی و ریاضی را در خود دارد. اینکه طبیعت منطق چیست مسئله‌ای فلسفی است و مطالعه آنچه طبیعت منطق را تشکیل می‌دهد (چه استنتاج باشد چه صدق) یک فعالیت ریاضی است.

بدون اینکه بخواهم موضع‌گیری فلسفی خاصی در نزاع بر سر طبیعت منطق داشته باشم لازم است تصریح کنم که این کتاب در سنت رویکرد نظریه‌برهانی به منطق نگارش شده است. در سرتاسر این کتاب مفروض است که طبیعت یک منطق را سیستم‌های استنتاجی تشکیل می‌دهند و علم منطق مطالعه چنین سیستم‌هایی است. به بیانی معادل، کتاب حاضر کتابی در حوزه نظریه برهان (به معنای دوم) است.

نظریه برهان (به معنای دوم) تاریخ پیچیده‌ای دارد که شرح هیچ بخشی از آن در درآمد یک کتاب نمی‌گنجد. با این حال قصد دارم یک جنبه از این تاریخ را به اختصار و بدون ورود به مسائل و بحث‌های فنی گزارش کنم. هدف من از این گزارش این است که مشخص شود که بخش‌هایی از نظریه برهان به معنای امروزی کلمه (یعنی به معنای دوم) چگونه شکل گرفته است. تاریخچه یک خطی نظریه برهان چنین است: شکل‌گیری نظریه برهان پی‌پدیده برنامه‌گتزن در مواجهه با برنامه هیلبرت در اوایل قرن بیستم است.

برنامه هیلبرت پروژه‌ای بوده است در بنیان ریاضیات و در مقابل پروژه‌های دیگری نظیر منطق‌گرایی، شهودگرایی و افلاطون‌گرایی. فارغ از جزئیات، ایده کلان هیلبرت این بوده است که ریاضیات خودبنیان است و صدق نمی‌تواند جایگاهی در ریاضیات داشته باشد، زیرا صدق رابطه‌ای میان جمله‌ها (یا گزاره‌ها) و جهان است. وارد کردن صدق در ریاضیات یعنی وارد کردن متافیزیک در ریاضیات. به جای آن، مفهوم محوری در ریاضیات، برهان و سازگاری است.

برنامه هیلبرت برای تحقق این ایده کلان، با تسامح و ساده‌سازی بسیار، بر این تمایز استوار بوده است که ریاضیات به دو بخش متناهیانه و نامتناهیانه قابل بخش‌بندی است؛ برای مثال محاسبه‌های جمع و ضرب در حساب اعداد طبیعی نمونه روشنی از ریاضیات متناهیانه است و حساب اندازه‌های نامتناهی که کانتور بنا نهاده است نمونه بارزی از ریاضیات نامتناهیانه است. از منظر هیلبرت ریاضیات متناهیانه بخش معنادار ریاضیات است و در مقابل، بخش نامتناهیانه ریاضیات معنادار نیست.

بیش از این، ریاضیات متناهیانه این توان را دارد که سازگاری کل ریاضیات را بیان و اثبات کند. ریاضیات نامتناهیانه نیز نسبت به ریاضیات متناهیانه پایستار است، به این معنا که هر گزاره‌ای از ریاضیات متناهیانه که در کل ریاضیات برهان داشته باشد برهانی در بخش متناهیانه

خواهد داشت. البته ریاضیات نامتناهیانه در کل ریاضیات نقش مهمی بازی می‌کند. بسیاری از برهان‌ها با استفاده از ابزارهای ریاضیات نامتناهیانه ساده‌تر می‌شوند، اما این نقش صرفاً نقشی ابزاری است. ریاضیات نامتناهیانه محتوا یا حکمی به ریاضیات متناهیانه نمی‌افزاید.

بنا بر این توضیحات، برنامه هیلبرت این بوده است که ریاضیات متناهیانه را صورت‌بندی کند، سازگاری ریاضیات را در ریاضیات متناهیانه بیان کند و این سازگاری را در ریاضیات متناهیانه اثبات کند. در مواجهه با این پروژه، کورت گودل و گرهارد گنتزن دو تأثیر کاملاً متفاوت داشته‌اند.

نقش گودل این بود که نشان دهد که ریاضیات متناهیانه (مشخصاً بخشی که شامل مقدار کافی از حساب اعداد طبیعی باشد) نمی‌تواند همه احکامی را که صورت‌بندی می‌کند، اثبات کند. گودل جملاتی از ریاضیات متناهیانه را معرفی می‌کند که ریاضیات متناهیانه نه می‌تواند خودشان و نه نقیضشان را اثبات کند. اصطلاحاً این جمله‌ها در ریاضیات متناهیانه تصمیم‌ناپذیر هستند. مورد مهمی از این جمله‌ها، سازگاری است. فرض کنیم که ریاضیات متناهیانه سازگار است. اگرچه ریاضیات متناهیانه می‌تواند سازگاری خود را بیان کند، نمی‌تواند آن را اثبات کند. این قضیه‌ها به «قضیه‌های ناتمامیت گودل» مشهور هستند.

با اینکه قضایای ناتمامیت گودل نتیجه‌ای ویرانگر برای برنامه هیلبرت داشته‌اند خط سیرهای پژوهشی مهمی را در ارتباط با نظریه برهان سبب شده‌اند. یک خط سیر این بوده است که چگونه می‌توان ایده کلان هیلبرت، یعنی خودبنیایی ریاضیات، را به نحو معقولی بازسازی و حفظ کرد. این خط سیر پژوهشی طبیعتاً پروژه‌ای است در حوزه فلسفه ریاضیات و در رابطه با بنیان ریاضیات. خط سیر دیگر ناشی از نحوه صورت‌بندی جمله تصمیم‌ناپذیر در ریاضیات متناهیانه (مشخصاً بخش حساب اعداد طبیعی) توسط گودل است. گودل این جمله را بر اساس محمول اثبات‌پذیری (محمولی که در زبان حساب اعداد طبیعی صورت‌بندی می‌شود) می‌سازد. مسئله مهم این است که این محمول چه ویژگی‌های ساختاری‌ای دارد و مشخصاً چه اصول و قواعدی بر آن حاکم است؟ با پژوهش‌هایی که در سال‌های بعد انجام می‌شود، روشن می‌شود که منطق حاکم بر این محمول یک منطق وجهی است که بعدها نام منطق گودل - لُب به خود می‌گیرد. پژوهش درباره منطق حاکم بر محمول اثبات‌پذیری در سیستم‌های مختلف حساب اعداد طبیعی حوزه‌ای را شکل داده است با عنوان «منطق اثبات‌پذیری».

نقش گنتزن در ارتباط با پروژه هیلبرت کاملاً در جهت عکس نقش گودل بوده است. گنتزن به دنبال این بوده است که نشان دهد می‌توان با فرض‌های معقولی سازگاری ریاضیات

متناهیانه را اثبات کرد. تمرکز اولیه گنتزن بر حساب اعداد طبیعی بوده است. بنا بر قضایای ناتمامیت گودل، روشن است که این فرض‌های معقول نمی‌توانند همان اصول نظام حساب اعداد طبیعی باشند، اما برنامه گنتزن این بوده است که بررسی کند این فرض‌های معقول چه می‌توانند باشند. برای تحقق این پروژه، گنتزن دو مرحله در نظر می‌گیرد.

در مرحله نخست گنتزن به سراغ این می‌رود که صورت‌بندی روشنی از مفهوم برهان ارائه کند. گنتزن در اینجا به دنبال ساخت یک سیستم اصل موضوعی نیست، زیرا چنین سیستمی در دست بوده است. به جای آن، او به دنبال صورت‌بندی فعالیت ریاضی‌دان است هنگامی که قضیه‌ای را اثبات می‌کند. چنین هدفی او را به سیستمی استنتاجی رهنمون می‌شود که امروزه آن را با نام «استنتاج طبیعی» می‌شناسیم. او سیستم‌های استنتاج طبیعی را برای منطق‌های کلاسیک و شهودگرایانه تنظیم می‌کند. در ادامه سعی می‌کند که سازگاری این سیستم‌های استنتاجی را نشان دهد. راهی که در پیش می‌گیرد این است که نشان دهد که ترکیب‌های قواعد استنتاج (یعنی استنتاج‌ها) به اثبات تناقض منجر نمی‌شوند.

استنتاج‌ها محدود نیستند، اما گنتزن آن‌ها را در دو دسته کلی جای می‌دهد: دسته‌ای که در آن‌ها عملگری که معرفی می‌شود، حذف نمی‌شود (استنتاج‌های نرمال) و دسته‌ای که در آن‌ها در برخی موارد چنین اتفاقی می‌افتد. دسته نخست را در نظر بگیریم. در این دسته از استنتاج‌ها هر فرمولی که در یک استنتاج نرمال ظاهر شود زیرفرمولی است از نتیجه یا مفروضات استنتاج. از این رو، ممکن نیست که هیچ استنتاج نرمالی تناقض را اثبات کند؛ اما دسته دوم چنین نیستند: ممکن است که فرمول‌هایی در وسط استنتاج ظاهر و محو شوند. اگر هر فرمولی که استنتاجی داشته باشد استنتاجی نرمال نیز داشته باشد (قضیه نرمال‌سازی) آنگاه می‌توان مطمئن بود که نظام استنتاجی ارائه شده سازگار است.

اگرچه گنتزن ایده‌هایی برای اثبات قضیه نرمال‌سازی داشته است، برهانی برای این قضیه منتشر نکرده است. یک دلیل دشواری تنظیم برهان برای قضیه نرمال‌سازی این بوده است که قواعد استنتاج در نظام استنتاج طبیعی موضعی نیستند بلکه بررسی صحت آن‌ها به مراحل پیشین استنتاج وابسته است. مشخصاً برخی قاعده‌های استنتاج مربوط به سورها به این وابسته هستند که متغیری که سور بر آن اعمال می‌شود در فرض‌هایی که این فرمول بر آن مبتنی است آزاد است یا نه.

برای اینکه چنین پیچیدگی‌هایی را مرتفع کند، گنتزن به سراغ ساخت سیستم استنتاجی دیگری می‌رود که قواعدش موضعی باشند. چنین سیستمی را امروزه با نام «حساب رشته» می‌شناسیم. گنتزن قضیه‌ای مشابه با قضیه نرمال‌سازی در استنتاج طبیعی را برای حساب رشته



صورت‌بندی و اثبات می‌کند. او نام این قضیه را «قضیه اصلی» می‌گذارد که امروزه آن را با عنوان «قضیه حذف برش» می‌شناسیم. با اثبات این قضیه، او نشان داده است که سیستمی که برای صورت‌بندی مفهوم برهان ارائه کرده است سازگار است.

اما هنوز کار گنتزن تمام نشده است. در مرحله بعد او سعی می‌کند نشان دهد فرض‌های معقول لازم برای اثبات سازگاری حساب اعداد طبیعی چه هستند. گنتزن پس از چند سال فعالیت و تنظیم چند برهان متفاوت بالاخره نشان می‌دهد که اگر استقرای ترامتناهی تا عدد ترتیبی خاصی ( $\epsilon_0$ ) مفروض باشد آنگاه می‌توان سازگاری حساب اعداد طبیعی را نشان داد. در ادامه او سعی می‌کند تا اثبات قضیه مشابهی را برای آنالیز اعداد حقیقی دنبال کند، اما جنگ اجازه نمی‌دهد. به هر ترتیب، تاریخ همیشه افرادی در خود دارد که پروژه‌های نیمه‌تمام دیگران را پیش ببرند. مطالعه سازگاری سیستم‌های ریاضیاتی به همان روشی که گنتزن پیش می‌برده است (یعنی مبتنی کردن آن به استقرای ترامتناهی تا یک عدد ترتیبی خاص) امروزه با عنوان «آنالیز اعداد ترتیبی» شناخته می‌شود.

برنامه گنتزن (خصوصاً مرحله نخست آن) پیامدهای گسترده‌ای داشته است که تنها به چند مورد اشاره می‌کنم که به کتاب حاضر ارتباط مستقیم دارد:

نخست: گنتزن یکی از بنیان‌گذاران سیستم‌های استنتاج طبیعی است. این سیستم‌ها چارچوب مهمی برای مطالعه منطق‌های مختلف و بستر گسترده‌ای برای بحث‌های فلسفی درباره منطق بوده‌اند.

دوم: حساب رشته، مخصوصاً در نیمه دوم قرن بیستم، به چارچوبی برای مطالعه منطق‌های مختلف در ارتباط با یکدیگر تبدیل شده است. تمایز میان قواعد ساختاری و قواعد عملگری در این چارچوب سبب شده است تا بتوان با محدود کردن و تغییراتی در هر دسته از این قواعد منطق‌های متفاوت تولید کرد. این حوزه پژوهش با عنوان «نظریه برهان ساختاری» شناخته می‌شود.

سوم: پروژه گنتزن برای صورت‌بندی مفهوم برهان پیامدهای فلسفی نیز داشته است. هم‌خوان با برنامه هیلبرت، در پروژه گنتزن برهان مفهوم بنیادین در منطق و ریاضیات است. چنین رویکردی حامی نظریه معنایی مبتنی بر نظریه برهان برای عملگرهای منطقی نیز هست. امروزه این گونه از نظریه‌های معنا برای عملگرهای منطقی را «سمنتیک نظریه برهانی» می‌نامند.

چهارم: حساب رشته گنتزن و مطالعه منطق‌های گوناگون در این چارچوب راه‌های نوی

برای مواجهه با پارادوکس‌های کهن پیش پای منطق‌دانان گذاشته است. مشخصاً ایده این است که با محدود کردن قواعد ساختاری در حساب رشته، می‌توان به منطق‌هایی دست یافت که از پارادوکس‌های کهن، نظیر دروغ‌گو، کری و پارادوکس‌های مجموعه، مبرا هستند.

اگرچه هیچ‌کدام از این چهار خط پژوهشی مسئله اصلی برنامه گتزن نبوده‌اند، پی‌پدیده‌های برنامه‌ای هستند که او پیش برده است. کتاب حاضر در چارچوب پژوهش‌هایی است که همین پی‌پدیده‌ها آن‌ها را تشکیل می‌دهند. کم‌وبیش بخش مرکزی آنچه امروزه به آن «نظریه برهان» می‌گویند مجموعه‌ای از پژوهش‌هاست که این پی‌پدیده‌ها رقم زده‌اند. کتاب حاضر نیز در همین سنت نوشته شده است و «نظریه برهان» در عنوان این کتاب ناظر به همین پژوهش‌هاست.

## ۲. درباره کتاب

نظریه برهان برای چه کسی؟ طبیعتاً نه برای همه. مخاطب این کتاب فیلسوف-منطق‌دانان هستند. این گروه شامل منطق‌دانانی است که علایق یا تخصص فلسفی دارند یا فیلسوفانی که علایق یا تخصص منطقی دارند. مخاطب کتاب هم دانشجویان این حوزه‌ها هستند و هم پژوهشگرانی که زمینه‌های تخصصی مرتبط با نظریه برهان دارند.

با چه پیش‌نیازی؟ طبیعتاً نه با هیچ پیش‌نیازی. این یک کتاب آموزشی منطق نیست، اگرچه خصوصاً در فصل نخست ملاحظات آموزشی را در چینه مطالب و تنظیم برهان‌ها دخالت داده‌ام. آموزشی بودن فصل نخست تا جایی پیش می‌رود که می‌توان این فصل را در یک ترم تحصیلی برای نظریه برهان مقدماتی (مبتنی بر حساب رشته) به کار گرفت. به هر حال در کل کتاب فرض کرده‌ام که خواننده با منطق‌هایی که درباره آن سخن می‌گوییم از پیش آشناست. از این رو، این کتاب به یک معنا خویش شامل نیست؛ اما در هر مورد که منطقی را بررسی می‌کنم آنچه از آن منطق لازم دارم را معرفی می‌کنم؛ بنابراین این کتاب به یک معنای دیگر خویش شامل است. همچنین فرض کرده‌ام خواننده با نظریه عرفی مقدماتی مجموعه آشناست.

چه بخشی از نظریه برهان؟ طبیعتاً نه همه نظریه برهان. نخست اینکه تمرکز کتاب بر رده مهمی از منطق‌های شناخته شده است و نه همه منطق‌ها. بدیهی است که پوشش دادن همه منطق‌های موجود در یک کتاب ممکن نیست. دوم اینکه تمرکز من بر بحث‌هایی در نظریه برهان ساختاری و سمبلیک نظریه برهانی است. تقریباً در همه فصل‌های کتاب مطالعه‌ها را تا جایی پیش می‌برم که به

این دو مرز محدود باشند؛ بنابراین بسیاری مسائل و بحث‌های مهم ذیل نظریه برهان در این کتاب نمی‌گنجند. آنالیز اعداد ترتیبی، منطق‌های اثبات‌پذیری، نظریه پیچیدگی و محاسبه‌پذیری نمونه‌های مهمی از این مسائل هستند. بیش از همه این‌ها، بررسی‌ها را اغلب در حد کارهای کلاسیک در ذیل هر بحث محدود کرده‌ام. یک دلیل این محدودیت این است که در کتاب فضای محدودی در اختیار دارم. دلیل دیگر این است که ایده‌های اصلی در همان کارهای کلاسیک روشن می‌شوند. کارهای متأثر از کارهای کلاسیک صرفاً تمیزکاری و زیباسازی آن ایده‌ها را دنبال کرده‌اند.

کتاب چه هست؟ قرار است مخاطبان کتاب با این محتوا مواجه شوند: از منظر کسی که رویکرد نظریه‌برهانی به منطق دارد منطق‌های مختلف چگونه قابل مطالعه هستند. به بیانی دیگر، این کتاب مطالعه معنای عملگرهای منطقی و منطق‌های متنوع با رویکرد نظریه‌برهانی به منطق و سمنتیک نظریه‌برهانی است. چارچوبی که برای این مطالعه انتخاب کرده‌ام حساب رشته است. در طی کتاب روشن خواهد شد که چرا چنین انتخابی داشته‌ام؛ بنابراین جز در مواردی که لازم باشد از استنتاج طبیعی یا سیستم‌های هیلبرتی (اصل موضوعی) سخن نخواهم گفت. بنا بر این ملاحظات است که کتاب چنین نامی دارد: «نظریه برهان؛ حساب رشته: چارچوبی برای معنا و منطق».

چرا یک کتاب دیگر در نظریه برهان؟ کتاب‌های زیادی در نظریه برهان برای مخاطبان مختلف و با اهداف متفاوتی نوشته شده است. در اینجا آن‌هایی را مورد نظر دارم که در برنامه گنتزن می‌گنجند و نه در ادامه کارهای گودل. من این کتاب‌ها را در چند دسته جای می‌دهم:

- دسته نخست در ذیل پروژه اصلی گنتزن (یعنی اثبات سازگاری حساب) هستند؛ برای نمونه شوت (Schütte, 1977)، تاکوتی (Takeuti, 1987)، نگری و فون پلاتو (Negri & von Plato, 2001b) و منکوسو و دیگران (Mancosu et al, 2021). تمایز کتاب حاضر با این کتاب‌ها روشن است. من قصد ورود به این پروژه را ندارم.

- دسته دوم قصد دارند طیف وسیعی از مباحث و تکنیک‌های نظریه برهان را برای منطق‌های محدودی پوشش دهند؛ برای نمونه ترولستر و شویتنبرگ (Troelstra & Schwichtenberg, 2000) و رستال (Restall, 2002) چنین هستند. کتاب حاضر در جهت عکس این هدف است: قصد دارم مسائل بنیادین محدودی را برای طیف وسیعی از منطق‌ها بررسی کنم. بیش از این، انتخاب مسائل بنیادی در این کتاب دل‌بخوایی نبوده است. این مسائل بنیادی همان‌هایی هستند که رویکرد نظریه‌برهانی به منطق را به تصویر می‌کشند.

● دسته سوم نزدیک‌ترین هدف به هدف کتاب حاضر را دارند: بررسی طیف گسترده‌ای از منطق‌ها در چارچوب حساب رشته. بیمبو (Bimbó, 2014) و پاولی (Paoli, 2002) از این دسته هستند. یک نقص مهم این کتاب‌ها این است که توجه بسیار کمی به منطق‌های فازی و وجهی دارند. همچنین به منطق‌های بدون برش هیچ توجهی نمی‌کنند در حالی که در سال‌های اخیر این منطق‌ها توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. بیش از همه و مهم‌تر از این‌ها، این کتاب‌ها نسبت به بستر فلسفی حساب رشته بی‌اعتنا یا دست‌کم کم‌اعتنا هستند. بستر فلسفی حساب رشته برای کتاب حاضر نقشی گریزناپذیر دارد، نقشی شبیه چراغی که روشن می‌شود تا بتوان در سایه نوری که می‌افکند حدس زد که در کجای یک جنگل تاریک هستیم.

با این توضیحات، امیدوارم روشن باشد که جای یک کتاب نظریه برهان در ادبیات بحث خالی است: کتابی که نظریه برهان و رویکرد نظریه‌برهانی به منطق را به مثابه رویکردی فلسفی-ریاضیاتی به معنا و منطق به تصویر بکشد. قصد دارم در این کتاب دقیقاً همین کار را به سرانجام برسانم.

در کتاب چه می‌گذرد؟ فصل صفرم شامل تعریف‌های مقدماتی است. فصل اول شامل قضیه‌های بنیادین نظریه برهان برای منطق‌های استاندارد است. همچنین ارتباطات میان حساب رشته و استنتاج طبیعی بررسی می‌شود. این‌ها لازم هستند تا بتوان وارد بحث فلسفی شد، چنان‌که دانستن فیزیک لازم است تا بتوان وارد بحث فلسفی درباره فیزیک شد. فصل دوم حساب رشته را به مثابه تحقق مناسبی برای سمتیک نظریه‌برهانی در بستر نظریه‌های معنای انتاج‌گرایانه می‌نشانند. در پایان این فصل روشن خواهد شد که «مطالعه معنا و منطق در چارچوب حساب رشته» دقیقاً به چه معناست. در فصل سوم رده مهمی از منطق‌ها در چارچوب حساب رشته بررسی می‌شوند. حاصل این فصل این است که اگر این منطق‌ها منطق‌های قابل قبولی هستند آنگاه چارچوب اولیه حساب رشته توانایی مطالعه آن‌ها را ندارد. فصل چهارم به بررسی گسترش‌هایی از چارچوب حساب رشته می‌پردازد که بتوانند این رده از منطق‌ها را در خود جای دهند. فصل چهارم با مواجهه با انبوهی از گسترش‌های معقول برای حساب رشته به پایان می‌رسد. کتاب را با این پایان باز رها می‌کنم تا نشان دهم کل آنچه در این کتاب می‌گذرد (که مثنی است نمونه خروارها پژوهش در حوزه نظریه برهان) گام‌هایی نخستین برای پروژه فلسفی-منطقی بزرگی است: مطالعه معنا و منطق در چارچوب حساب رشته.

در فصل اول منطق‌های مرتبه اول (و به طور گذرا مرتبه دوم) را بررسی می‌کنم، اما از فصل دوم تا پایان کتاب تا جایی که ممکن است از منطق گزاره‌ها پیش‌تر نمی‌روم. دست‌کم

دو دلیل برای این تصمیم دارم. یک دلیل فضای محدود کتاب است. دلیل دوم این است که انگیزه شکل‌گیری اغلب منطق‌هایی که در فصل‌های بعدی بررسی می‌شوند به مسائلی درباره عملگرهای گزاره‌ای مربوط هستند.

یادداشت چیست؟ در کتاب تعداد قابل توجهی یادداشت دیده می‌شود. یادداشت‌ها محتواهای متنوعی دارند. برخی نکته‌ای حاشیه‌ای هستند. برخی دیگر رفع یک فهم احتمالی اشتباه‌اند. برخی دیگر ارتباط مهمی هستند که مطالب گفته‌شده با مطالب دیگری دارند که در کتاب نیست یا در جای دیگری از کتاب هست. برخی نیز نکته‌ای تاریخی بیان می‌کنند. چیزهای دیگری هم هست. به هر ترتیب، آنچه یک پاراگراف را یادداشت می‌کند این است که اولاً گفتن آن مفید است و ثانیاً گفتن آن در میان متن، روایت متن را به هم می‌زند؛ بنابراین یادداشت‌ها شاید شبیه پانوش باشند، اگرچه هیچ پانوشی در این کتاب وجود ندارد.

### ۳. درباره زبان

معادل‌های نام‌ها یا اصطلاحات را در متن نیاورده‌ام. دلیل این کار رعایت زیبایی دیداری متن است. کتاب‌های منطق به زبان فارسی و با نمادهای انگلیسی به اندازه کافی بدقیافه هستند. نخواستم که به این بدقیافگی چیزی بیفزایم.

معیار من برای تلفظ نام‌ها یک تلفظ متداول در زبان انگلیسی بوده است، اگرچه ممکن است در زبانی که صاحب نام اهل آن است تلفظ متفاوتی درست باشد یا در انگلیسی تلفظ درست دیگری از آن نام وجود داشته باشد؛ برای مثال تلفظ درست «لوکاشه‌ویچ» در زبان مبدأ «ووکاشه‌ویچ» است، اگرچه در میان انگلیسی‌زبانان هر دوی این تلفظ‌ها رایج است. در اینجا تلفظ نخست را انتخاب کرده‌ام.

ترجمه اصطلاحات تا حد زیادی به پسند نگارنده مربوط است. با این حال اصراری بر معادل‌گذاری‌های اصطلاحات ندارم. اگر خواننده تصور می‌کند معادل بهتری در ذهن دارد در طول کتاب ترجمه‌های من را خط بزند و معادل دلخواه خود را جای آن بگذارد تا کمتر اذیت شود.

در واژه‌نامه اغلب نام‌ها و واژگان اصطلاحی و معادل آن‌ها آمده است، اما چند اصطلاح هست که باید در خصوص ترجمه آن نکته‌ای بگویم:

- شهودی را همیشه برای *intuitive* به کار برده‌ام و شهودگرایانه را برای *intuitionistic*.

شهودی بودن یک چیز به معنای آن است که از جانب شهودهای متعارف ما حمایت می‌شود، اما شهودگرایانه بودن یعنی مرتبط بودن به یک منطق یا فلسفه خاص: شهودگرایی.

● به نظر من ترجمه صحیح *sequenz* در فارسی «دنباله» است. در آلمانی این کلمه معنای در پی بودن را در خود دارد. *sequence*، *sequent* و *consecution* که پیشنهادهایی برای ترجمه این کلمه آلمانی به انگلیسی بوده‌اند نیز در انگلیسی چنین معنایی در خود دارند. «دنباله» نشان می‌دهد که در این سیستم‌ها آنچه بررسی می‌شود این است که چه رده فرض‌هایی چه نتایجی را به دنبال دارند. این در حالی است که ترجمه متداول و جاافتاده برای این اصطلاح در فارسی «رشته» است. «رشته» به هیچ وجه در پی داشتن را در معنای خود ندارد و به روشنی ترجمه نادرستی است. به هر حال، جانب ترجمه‌های متداول در فارسی برای این کلمه را رعایت کرده‌ام و ترجمه *sequenz* به رشته را تغییر نداده‌ام.

● به نظر من «برهان» ترجمه خوبی برای *proof* نیست. ترجمه بهتر آن «اثبات» است. از این رو، *proof theory* را بهتر است که «نظریه اثبات» ترجمه کنیم. یک دلیل برای چنین ترجیحی امکان صرف کردن «اثبات» است؛ مثلاً اثبات می‌شود، اثبات می‌کند و از این دست. دلیل دیگر این است که «برهان» در منطق سنتی معنای جاافتاده و متفاوتی دارد و این ترجمه ممکن است که خواننده آشنا با این سنت را گمراه کند. به هر ترتیب، این مشکلات را به جان می‌خرم تا ترجمه متداول در جامعه فارسی‌زبان را تغییر ندهم.

● در کتاب به جای ترجمه *semantics* به زبان فارسی، کلمه «سمنتیک» را به کار گرفته‌ام. *semantics* در اصطلاح متداول منطقی دو معنا دارد: معناشناسی (به معنای عام کلمه) و نظریه مدل. در این کتاب همواره «سمنتیک» را مترادف با «معناشناسی» به کار برده‌ام. دلیل چنین انتخابی هم‌خوانی با ادبیات نظریه برهان به انگلیسی است که اجازه می‌دهد که «سمنتیک» نظریه‌برهانی ترکیب سازگاری باشد.

در متن خلط اشاره و کاربرد را به‌وفور انجام داده‌ام. این کار را برای این کرده‌ام که متن به اندازه کافی شبیه یک متن به زبان فارسی متداول باشد. غیر از این، همیشه زمینه سخن روشن می‌کند که کاربرد رخ داده است یا اشاره. بنا بر این دلایل، جز در موارد خاصی که تأکیدی در نظر دارم اغلب از نماد گیومه («») یا نماد دیگری برای رفع ابهام اشاره و کاربرد استفاده نمی‌کنم.

نیز «را» را به طور نامنظمی دل‌بخواهی به کار گرفته‌ام. قاعده‌ای که این دل‌بخواهی بودن از آن پیروی می‌کند این است: هر جا احساس کرده‌ام که آوردن «را» نشان می‌دهد که تکیه و

تأکید جمله در کجاست همان‌جا آن را آورده‌ام؛ بنابراین خواننده‌ای که به جایگاه «را» در جمله حساسیت ویژه‌ای دارد منتظر مشاهداتی ناخوشایند باشد. این وضعیت شبیه وضعیت کسی است که به گرده‌افشانی گل‌ها در بهار آلرژی دارد.

**قرارداد:** علامت ■ نشان‌دهنده‌ی انتهای تعریف‌ها، قراردادهای یادداشت‌ها، لم‌ها، قضیه‌ها و نتیجه‌های بدون برهان و برهان‌های لم‌ها، قضیه‌ها و نتیجه‌هاست. همچنین همه‌ی تعریف‌ها، قراردادهای یادداشت‌ها، لم‌ها، قضیه‌ها و نتیجه‌های درون یک فصل با یک شماره‌گذاری پی‌درپی مشخص شده‌اند. ■

#### ۴. سپاس‌گزاری

افراد و چیزهای بسیاری هستند که لازم است از آن‌ها سپاس‌گزاری کنم. امیدوارم آن‌ها که از قلم می‌افتند دل‌گیر نشوند.

وقتی مشغول انجام کاری هستم، اغلب خلق و خوی متفاوتی از روزهای دیگر دارم. از همسر (و در کنار او دختر کوچکم) تشکر می‌کنم که صبورانه این خوی متفاوت را تحمل کرد؛ اگرچه تحمل خلق و خوی روزهای دیگر من نیز جای سپاس‌گزاری دیگری دارد.

بخش‌هایی از مطالب این کتاب را چند بار تدریس کرده‌ام. از دانشجویانی که این مطالب را از من شنیدند و بازخوردهای آن‌ها سبب شد که تغییراتی در متن اعمال کنم، تشکر می‌کنم.

میزان قابل توجهی از مطالب این کتاب را برای دو دوست عزیز و دانشجوی وقت دکتری گروهی که در آن هستم (گروه فلسفه و منطق دانشگاه تربیت مدرس) در روزها و ساعت‌های بسیار و با جزئیات فراوان ارائه کرده‌ام. بیش از این، هرگاه نمی‌دانستم باید چگونه مطلبی را بیان کنم از بینش‌ها و پیشنهادهای آن‌ها کمک می‌گرفتم. از سیاوش احمدزاده و جاوید جعفری برای چنین کمک‌های بی‌جایگزینی که در پیشبرد این کتاب کردند، ممنونم.

نسخه‌ی نهایی این کتاب را برخی دوستان و همکاران (به‌طور کامل یا جزئی) مطالعه کردند و توجه من را به نقایص مهمی جلب کردند. از اسدالله فلاحی، مجتبی مجتهدی، سیاوش احمدزاده و پارسا فروغی برای چنین لطفی سپاس‌گزارم. پس از نگارش اولیه‌ی کتاب، هر بار که آن را مطالعه کرده‌ام اشتباهاتی در آن دیده‌ام. لابد اگر خودم یا خواننده، نسخه‌ی فعلی را هم مطالعه کند اشتباهاتی ببیند. طبیعی است که کاستی‌ها و اشتباهات این کتاب صرفاً بر عهده‌ی من است، نه این دوستان.

مقدار قابل توجهی از سامان‌دهی و نگارش کتاب را در روزگاری پیش برده‌ام که همه‌گیری کرونا سبب شده بود که در دانشگاه‌ها سکوتی ممتد حاکم باشد. نمی‌دانم تشکر از کرونا کار درستی است یا نه.

اغلب وقتی حال روحی مناسبی ندارم، بیشتر و شاید بهتر کار می‌کنم. از غم ایام سپاس گزارم که در روزها و شب‌های تنظیم و نگارش کتاب بیش از سایر زمان‌ها گریبان‌گیر بود.

داود حسینی

گروه فلسفه و منطق دانشگاه تربیت مدرس

پاییز ۱۴۰۲ خورشیدی

تهران